0.1 Quillen's theorem

Quillen は small catgeory の分類空間に関し、もとの small category 間の functor から誘導された分類空間の間の写像が homotopy equivalence になる条件をとても簡潔な形で述べた。small category の分類空間は CW complex であるので、homotopy equivalence と weak homotopy equivalence は同値である。weak homotopy equivalence を示すためには、その homotopy fiber が weakly contractible かどうかを見ればよい。fibration であれば、単なる fiber をみればよい。では分類空間をとる前の category での fiber、homotopy fiber にあたるものを考える。

Definition 0.1.1

$f : X \longrightarrow Y$: functor と、$y \in Y$ に対し f の y 上の fiber、$f^{-1}(y)$ は X の sub category として定義する。

$$\mathrm{ob}(f^{-1}(y)) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \quad , \quad \mathrm{Hom}_{f^{-1}(y)}(x, x') = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_X(x, x') \mid f(\varphi) = 1_y\}$$

また、f の y 上の right fiber、f/y とは、

$$\mathrm{ob}(f/y) = \{(u, x) \in \mathrm{Mor}(Y) \times X \mid t(u) = x, s(u) = f(x)\} \ , \ \mathrm{Hom}_{f/y}((u, x), (v, x')) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_X(x, x') \mid v \circ f(\varphi) = u\}$$

であり、合成が X の morphism の合成として定義する。同様にして left fiber、y/f も定義される。

Definition 0.1.2

$f : X \longrightarrow Y$: functor に対し、fiber と right fiber の間には次の functor

$$F : f^{-1}(y) \longrightarrow f/y$$

$F(x) = (1_y, x), F(\varphi) = \varphi$ が定義される。この functor が adjoint を持つとき、f は prefibered であるという。

Theorem 0.1.3 (Quillen's theorem A)

$f : X \longrightarrow Y$: functor で任意の $y \in Y$ に対し、f/y or y/f が contractible であるとき、$Bf : BX \longrightarrow BY$ は homotopy equivalence である。

これが有名な Quiilen の Theorem A であるが証明の前にいくつか準備することがある。

Lemma 0.1.4

C を small category としたとき、任意の object $x \in C$ に対し、その over category C/x および x/C は contractible である。

proof)　C/x は $1x : x \longrightarrow x in \mathrm{ob}(C/x)$ が terminal object で、x/C では inicial object になっているからである。

$\square$

Theorem A の証明は bisimplicial space を用いて行う。bisimplicial space とは functor $\Delta^{op} \times \Delta^{op} \longrightarrow \mathrm{Top}$ のことである。次の Lemma は bisimplicial space の realization に関するものであるが証明は省く。

Lemma 0.1.5

T_{**} を bisimplicial space とすると、次の natural homeomorphism

$$|p \mapsto T_{pp}| \cong |p \mapsto |q \mapsto T_{pq}|| \cong |q \mapsto |p \mapsto T_{pq}||$$

が存在する。

Theorem 0.1.6 (Quillen's theorem A)

$f : X \longrightarrow Y$: functor で任意の $y \in Y$ に対し、f/y or y/f が contractible であるとき、$Bf : BX \longrightarrow BY$ は homotopy equivalence である。

proof) $S(f)$ を $\mathrm{ob}(S(f)) = \{(x, y, u) \in \mathrm{ob}(X) \times \mathrm{ob}(Y) \times \mathrm{Mor}(Y) \mid u \in \mathrm{Hom}(y, f(x))\}$ で、$(x, y, u), (z, w, v) \in \mathrm{ob}(S(f))$ に対し、

$$\mathrm{Hom}((x, y, u), (z, w, v)) = \{(\varphi, \chi) \in \mathrm{Mor}(X) \times \mathrm{Mor}(Y) \mid \varphi \in \mathrm{Hom}(x, z), \chi \in \mathrm{Hom}(w, y), f(\varphi) \circ u \circ \chi = v\}$$

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[d, "u"'] & w \arrow[l, "\chi"'] \arrow[d, "v"] \\
f(x) \arrow[r, "f(\varphi)"'] & f(z)
\end{tikzcd}$$

$$p_X : S(f) \longrightarrow X\ ,\ p_Y : S(f) \longrightarrow Y^{op}$$

を projection により定義する。まず p_X が homotopy equivalence であること示す。$T(f)$: bisimplicial set を

$$T(f)_{p,q} = N_p(Y^{op}) \times_f N_q(X) = \{y_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots y_0 \longrightarrow f(x_0), x_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_q\}$$

により定義する。degeneracy,face map は、$N_*(Y^{op})$ と $N_*(X)$ のを用いて定義する。first componet を forget することにより、bisimplicial set の map

$$\pi : T(f)_{p,q} \longrightarrow N_q(X)$$

が定義される。ただし、$N_q(X)$ は $N_{p,q}(X) = N_q(X)$ として bisimplicial set と見なす。このとき、この realization を考えるが、$T(f)$ の realization とは、simplicial space $q \mapsto |p \mapsto T(f)_{p,q}|$ の realization と考えられる。ここで q を fix し、simplicial set $U(f) : p \mapsto T(f)_{p,q}$ について見てみると、これは、

$$U(f)_p = \{y_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots y_0 \longrightarrow f(x_0), x_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_q\}$$

であるが、ここでの degeneracy,face は $N_*(Y^{op})$ によって定義される。つまり、この realization を考えた際、$N_q(X)$ の部分が違えば、張り合わされる事は無いため、

$$|U(f)| \cong \coprod_{x \in N_q(X)} |U(f)(x)|$$

である。ただし、$U(f)_p(x)$ は $U(f)_p$ の $N_q(X)$ 部分を x で fix した simplicial set である。$x = x_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_q$ とおくと、$U(f)_p(x) = N_p(Y/f(x_0))$ と考えられる。このとき、comma category $Y/f(x_0)$

は terminal object を持つため、$Y/f(x_0)$ は contractible、よって、$|U(f)(x)|$ も contractible である。よって、π の reallization は simplicial space 間の map

$$\pi_q : \coprod_{x \in N_q(X)} B(Y/f(x_0)) = |U(f)| \longrightarrow \coprod_{x \in N_q(X)} \{*\} = N_q(X)$$

と考えられるため、dimensionwise で homotopy equivalence であり、$|U(f)|$ は CW complex であるから π は good simplicial space 間の map であるため、$|\pi|$ は homotopy equivalence である。また、$T_{qq} = N_q S(f)$ であり、Lemma より、p_X は homtopy equivalence

同様の議論を、p_Y についても繰り返すと、bisimplicial set の map $T_{p,q} \longrightarrow N_p(Y^{op})$ の realization を考えるが、今度は、comma category $Y/f(x_0)$ にあたる部分がちょうど left fiber y_0/f に対応し、

$$\coprod_{y_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow y_0 \in N_p(Y^{op})} B(y_0/f) \longrightarrow \coprod_{y_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow y_0 \in N_p(Y^{op})} \{*\} = N_p(Y^{op})$$

という simplicial space の map の realization を考えることになる。ここで仮定より、任意の $y_0 \in Y$ に対し、$B(y_0/f)$ が contractible だから、やはり realization が homotopy equivalence となり、p_Y もまた homotopy equivalence である。最後に、

$$g : S(f) \longrightarrow S(1_Y)$$

を $g(x, y, u) = (gx, y, u)$ により functor を定義すると、

$$\begin{CD}
Y^{op} @<{p_Y}<< S(f) @>{p_X}>> X \\
@V{=}VV @V{g}VV @VV{f}V \\
Y^{op} @<{p_Y}<< S(1_Y) @>{p_X}>> Y
\end{CD}$$

は可換である。任意の $y \in \mathrm{ob}(Y)$ に対し、$y/1_Y = Y/y$ となるので、left fiber はすべて contractible になっている。よって下の横列に対しても、p_X, p_Y はいずれも homotopy equivalence であり、f が homotopy equivalence であることが言える。

□

Corollary 0.1.7

$f : X \longrightarrow Y$: pre(co)fibered functor で任意の $y \in Y$ に対し、$f^{-1}(y)$ が contractible であるとき、$Bf : BX \longrightarrow BY$ は homotopy equivalence である。

一方、Quillen's Theorem B と呼ばれているものは、quasi fibration についての考察である。

Theorem 0.1.8 (Quillen's Theorem B)

$f : X \longrightarrow Y$ を functor とし、任意の $u : y \longrightarrow y'$ に対し、誘導される functor

$$u/f : y'/f \longrightarrow y/f$$

が homotopy equivalence のとき、任意の $y \in \mathrm{ob}(Y), x \in f^{-1}(y) \subset \mathrm{ob}(X)$ に対し、

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(BY, y) \longrightarrow \pi_n(B(y/f), (x, 1_y)) \longrightarrow \pi_n(BX, x) \xrightarrow{Bf_*} \pi_n(BY, y) \longrightarrow \cdots$$

という長い完全列が存在する。

Thorem B は Bf が quasi fibration となる条件を述べているが、この quasi fibration の定義を言い換えておく。

Definition 0.1.9

空間における commutative diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

が homotopy cartesian であるとは、natural map

$$A \longrightarrow \mathrm{holim}(B \longrightarrow D \longleftarrow C)$$

が homotopy equivalence であるときを意味する。$\mathrm{holim}(B \longrightarrow D \longleftarrow C)$ とは doble mapping track であり、正確に書くと

$$\mathrm{holim}(B \xrightarrow{f} D \xleftarrow{g} C) = \{(b, w, c) \in B \times \mathrm{Map}(I, D) \times C \mid w(0) = f(b), w(1) = g(c)\}$$

という空間であり、natural map とは、$a \mapsto (u(a), c_{fu(a)=gv(a)}, v(a))$ による対応である。

Remmark 0.1.10

$p : E \longrightarrow B$ が quasi fibration であることと、任意の $b \in B$ に対し、pull back diagram

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(b) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ * \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd}$$

が homotopy cartesian であることは同値である。

次は homtopy limit に関する基本的性質である。これは一般的な model category として議論できる。

Lemma 0.1.11

次の commutative diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & Y \arrow[d, "\simeq"'] & Z \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"'] \\ X' \arrow[r] & Y' & Z' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

において、縦列はすべて homotopy equivalence とする。このとき、induced map

$$\mathrm{holim}(X \longrightarrow Y \longleftarrow Z) \longrightarrow \mathrm{holim}(X' \longrightarrow Y' \longleftarrow Z')$$

は homotopy equivalence である。

Corollary 0.1.12

homtoopy cartesian square

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

において、B が contractible であることと、natural map $A \longrightarrow F_{g,d} = \mathrm{holim}(* \xrightarrow{d} D \xleftarrow{g} C)$ が任意の $d \in D$ に対し、homotopy equivalence であることは同値。

Lemma 0.1.13

C を small category とし、Top を位相空間の category、$X : C \longrightarrow \mathrm{Top}$ を functor とする。X_*C は simplicial space で、

$$X_pC = \coprod_{i_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow i_p \in N_p(C)} X(i_0)$$

で degeneracy と face はそれぞれ $N_*(C)$ から誘導されたものとする。

$$g_* : X_*C \longrightarrow N_*C$$

を index 対応で与えられる simplicial space の map としたとき、任意の C の morphism $f : i \longrightarrow i'$ において、$X(f) : X(i) \longrightarrow X(i')$ が homotopy equivalence ならば、$g = |g_*| : |X_*C| = XC \longrightarrow |N_*C| = BC$ は quasi fibration である。

proof)　証明には Dold-Thom criterion を用いる。つまり、simplicial space の実現における自然な filtration に対し、帰納法で quasi fibration を示す。まず、$n = 0$ のとき、

$$g_0 : XC^{(0)} = \coprod_{i \in \mathrm{ob}(C)} X(i) \longrightarrow BC^{(0)} = \mathrm{ob}(C)$$

は fibration であり、$g_{n-1} : XC^{(n-1)} \longrightarrow BC^{(n-1)}$ が quasi fibration であることを仮定する。このとき、$U = BC^{(n)} - BC^{(n-1)} \cong \coprod \Delta^n$ であり、

$$g_n : g_n^{-1}(U) \longrightarrow U$$

は fibration である。あとは、$\partial\Delta^n \subset \Delta^n$ が NDR を用いて、$BC^{(n-1)}$ を $BC^{(n)}$ 内で open set V に膨らませ、

$$g_n : g_n^{-1}(V) \longrightarrow V$$

を考え、このとき $X(i) \longrightarrow X(i')$ が homotopy equivalence という仮定を用いると、g_n が $p^{-1}(V)$ 上でも quasi fibration であることが言える。もう少し詳しく言うと、

$$\begin{tikzcd} XC^{(n)} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "g_n \times 1"'] & XC^{(n)} \arrow[d, "g_n"] \\ BC^{(n)} \times I \arrow[r, "G"'] & BC^{(n)} \end{tikzcd}$$

の可換図で、G は NDR reprezentation で H はその lift とし、$x = ((i_0 \xrightarrow{f} i_1 \to \cdots \to i_n), t_1, \cdots, t_n) \in BC^{(n)}$ に対し、

$$H_1 : g_n^{-1}(x) \longrightarrow g_n^{-1}(G(x,1))$$

は、$X(f) : X(i_0) \longrightarrow X(i_1)$ が homotopy equivalence だから、H_1 も homotopy equivalence である。よって、g_n は定義域全体で quasi fibration になっていて、したがって g も quasi fibration である。

□

Theorem 0.1.14 (Quillen's Theorem B)

$f : X \longrightarrow Y$ を functor とし、任意の $u : y \longrightarrow y'$ に対し、誘導される functor

$$u/f : y'/f \longrightarrow y/f$$

が homotopy equivalence のとき、任意の $y \in \mathrm{ob}(Y), x \in f^{-1}(y) \subset \mathrm{ob}(X)$ に対し、

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(BY, y) \longrightarrow \pi_n(B(y/f), (x, 1_y)) \longrightarrow \pi_n(BX, x) \xrightarrow{Bf_*} \pi_n(BY, y) \longrightarrow \cdots$$

という長い完全列が存在する。

proof)　Theorem A の証明を思い出すと、$p_X : S(f) \longrightarrow X$ は homotopy equivalence で、$p_Y : S(f) \longrightarrow Y^{op}$ は homotopy equivalence かどうかは分からない。Bp_Y を詳しく見たとき、$(p \mapsto |q \mapsto T_{pq}|) \longrightarrow N_p(Y^{op})$ という simplicial space の map の実現であった。さらに詳しく描くと、各次元

$$\coprod_{y_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow y_0 \in N_p(Y^{op})} B(y_0/f) \longrightarrow N_p(Y^{op})$$

の index 対応の map であり、functor $Y^{op} \longrightarrow \mathrm{Top}$ を $y \longrightarrow B(y_0/f)$ により定義すると、仮定より、$y \longrightarrow y'$ に対し、$B(y'/f) \longrightarrow B(y/f)$ は homtoopy equivalence だから、Lemma **??** が使えて、p_Y は quasi fibration であることが分かる。Bp_Y の $y \in \mathrm{ob}(Y^{op}) \subset BY^{op}$ における fiber は、上記の simplicial space level の定義を見れば、$B(y/f)$ である。よって、次の pull back diagram

$$\begin{tikzcd}
y/f \arrow[r] \arrow[d] & S(f) \arrow[d, "p_Y"] \\
* \arrow[r, "y"'] & Y^{op}
\end{tikzcd}$$

が homotopy cartesian である。さらに、この diagram を拡張すると、

$$\begin{tikzcd}
y/f \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & S(f) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & X \arrow[d, "f"] \\
y/Y \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & S(1_Y) \arrow[r, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"'] & Y \\
* \arrow[r, "y"'] & Y^{op} &
\end{tikzcd}$$

の commutative diagram が得られる。(1)+(3) の diagram が homtopy cartesian である。このとき、Lemma ??によると、

$$\begin{tikzcd} y/Y \arrow[r, "y"] \arrow[d, "\simeq"'] & S(1_Y) \arrow[d, "\simeq"'] & S(f) \arrow[l, "p_Y"'] \arrow[d, "="'] \\ * \arrow[r, "y"] & Y^{op} & S(f) \arrow[l, "p_Y"'] \end{tikzcd}$$

による homotopy pull back は homotopy equivalent になり、これより、(1) の diagram は homotpy cartesian である。さらに、同様に (1)+(2) が homotopy cartesian になる。y/Y は contractible であるため、Cor ?? y/f と p_Y の homotpy fiber とは homotopy 同値となる。よって、

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(BY, y) \longrightarrow \pi_n(B(y/f), (x, 1_y)) \longrightarrow \pi_n(BX, x) \xrightarrow{Bf_*} \pi_n(BY, y) \longrightarrow \cdots$$

の完全列を生み出す。

□

Corollary 0.1.15

$f : X \longrightarrow Y$ が pre(co)fibered であって、任意の Y の morphism $f : y \longrightarrow y'$ に対し、$f^* : f^{-1}(y') \longrightarrow f^{-1}(y)$ が homotopy equivalence ならば、任意の $x \in f^{-1}(y) \subset \mathrm{ob}(X)$ に対し、

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(BY, y) \longrightarrow \pi_n(B(f^{-1}(y)), x) \longrightarrow \pi_n(BX, x) \xrightarrow{Bf_*} \pi_n(BY, y) \longrightarrow \cdots$$

という完全列が存在する。